Ano 10 – Número/vol.28 – dezembro/2018

Revista Tecnologias na Educação

ISSN: 1984-4751

RÉGUA TRIGONOMÉTRICA E *GEOGEBRA*: ALGUMAS POSSIBILIDADES PARA O ESTUDO DE FUNÇÃO TANGENTE[1]

Denisson Almeida Novais[2]

Jonas dos Santos[3]

Wériton de Souza Lôbo[4]

RESUMO

O presente trabalho relata uma experiência vivenciada por três alunos do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática – PPGEM, da Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC. A experiência vivenciada foi a aplicação de uma sequência de ensino em uma turma do primeiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática da UESC, na disciplina de Introdução ao Cálculo, na qual foi trabalhado o conteúdo função tangente. No desenvolvimento da sequência de ensino, utilizou-se como recursos o *software* de geometria dinâmica, *GeoGebra* e o material manipulável Régua Trigonométrica, que contribuíram para o processo de ensino e de aprendizagem da função tangente. A experiência mostrou que atividades desenvolvidas com a utilização da tecnologia e do material manipulável podem colaborar, de forma efetiva, com o processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Palavras-chave: *GeoGebra*; Régua Trigonométrica; Função Tangente.

1. Introdução

O presente relato é resultado de uma sequência de ensino desenvolvida em uma turma do primeiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz, na disciplina Introdução ao Cálculo, que tem por finalidade expor experiências

---

[1] Nossos agradecimentos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Nível Superior – CAPES, Brasil pela bolsa de estudos ao terceiro autor.

[2] Mestrando em Educação Matemática, pelo Programa de Pós-graduação em Educação Matemática (PPGEM) da Universidade Estadual de Santa Cruz.

[3] Mestrando em Educação Matemática, pelo Programa de Pós-graduação em Educação Matemática (PPGEM) da Universidade Estadual de Santa Cruz.

[4] Mestrando em Educação Matemática, pelo Programa de Pós-graduação em Educação Matemática (PPGEM) da Universidade Estadual de Santa Cruz.

vivenciadas por nós, mestrandos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPGEM, da Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC.

Esta sequência surgiu numa parceria entre os professores da disciplina Cálculo Diferencial e Integral na Perspectiva da Educação Matemática (disciplina do mestrado) e nós, alunos do mestrado, no intuito de integrar as atividades desenvolvidas no PPGEM com os alunos da graduação. É importante lembrar, que os professores que atuam nesta disciplina, do mestrado, também são professores da graduação na respectiva Instituição de Ensino. Na oportunidade, os mestrandos foram distribuídos em grupos e para cada um deles foi proposto que desenvolvesse uma sequência de ensino com foco nos conceitos de Trigonometria, sendo que o nosso grupo trabalhou com a função tangente.

Para que pudéssemos dar início à construção da sequência de ensino, decidimos a priori observar a turma da graduação. Esse primeiro momento aconteceu quando os alunos de Introdução ao Cálculo estavam trabalhando com os conceitos iniciais de seno e cosseno no círculo trigonométrico, assim como com as funções seno e cosseno, utilizando o *software* de geometria dinâmica o *GeoGebra*.

A partir dessa observação percebemos que a utilização do referido *software* auxiliou o entendimento dos graduandos dos conceitos iniciais da Trigonometria. Assim sendo, para a preparação de nossa sequência, cujo foco era a função tangente, aproveitamos do *software GeoGebra*, afinal os graduandos já estavam familiarizados, e acrescentamos um material manipulável, denominada Régua Trigonométrica.

2. Embasamento Teórico

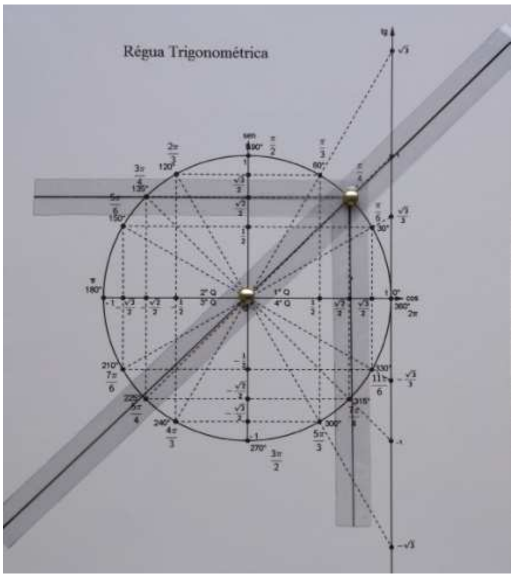
Decidimos trabalhar com materiais manipuláveis, especialmente, com a Régua Trigonométrica por acreditarmos que pode tornar as aulas de matemática, particularmente o conteúdo de trigonometria, mais atraentes e motivadoras, visando melhor aprendizagem dos alunos. A esse respeito, Lobo e Jesus (2014) destacam que:

> Com relação aos materiais manipuláveis propomos a utilização da Régua Trigonométrica por se tratar, em nosso entendimento, de um instrumento inovador, pois acreditamos ser uma ferramenta que poderia ser encontrada nas escolas, uma vez que é de fácil construção e de simples manuseio. Nas escolas, em especial nas aulas de trigonometria, acreditamos que a sua utilização poderia dar um teor mais prático ao aprendizado dos alunos, além de poder ser utilizada

> como forma de consulta às referentes dúvidas que os alunos pudessem vim a ter, ou seja, poderiam encontrar durante o manuseio do material, respostas aos problemas. (LOBO; JESUS, 2014, p. 5).

Nessa perspectiva, percebemos que a Régua Trigonométrica pode ser de fundamental importância durante a construção dos conceitos relacionados à trigonometria. A utilização desse material possibilita o desenvolvimento da capacidade de análise e compreensão dos conceitos envolvidos, ou seja, a interação diretamente com a Régua Trigonométrica, se trabalhada adequadamente, pode ser um facilitador no entendimento das propriedades relativas à Trigonometria. Apresentamos na Figura 1, a ilustração da Régua Trigonométrica.

Figura 1: Régua Trigonométrica



Fonte: Lobo e Jesus (2014).

A Régua Trigonométrica trata-se de um instrumento pedagógico, que possibilita observar valores do seno, cosseno e tangente simultaneamente, contribuindo assim, no processo de ensino e de aprendizagem dos conceitos de trigonometria.

Podemos construir a Régua Trigonométrica utilizando o *software* de geometria dinâmica, o *GeoGebra*, ou ainda com o auxílio da régua e compasso. Ao nosso ver, seria interessante que essa construção fosse feita, com a orientação do professor, pelos próprios alunos, uma vez que poderia auxiliar de maneira significativa a aprendizagem deste conteúdo. Essa aprendizagem se justifica pelo fato que no momento da construção da régua trigonométrica já é possível discutir as propriedades intrínsecas ao conceito.

Quanto à decisão de utilizar o *software GeoGebra* partiu da observação da aula anterior ministrada aos graduandos. Percebermos que a receptividade foi positiva dos graduandos durante a execução da sequência de ensino dos conteúdos seno e cosseno, o que nos motivou para continuar com o mesmo software.

Os PCN (BRASIL, 1998) consideram os computadores, em particular os *softwares*, como uma forte ferramenta para auxiliar no processo do ensino e aprendizagem, já que estes tendem a possibilitar os estudantes pensar, refletir e criar soluções que contribuem no ambiente papel e lápis. Segundo Brito e Purificação (2012), a educação é um processo que abrange todos os seres humanos porque está entrelaçada com todos os fatos do cotidiano. Por isso, para as autoras, todas as situações do cotidiano são situações propícias para aprendizagem, para ensinar e para pensar.

Nesse sentido, elas afirmam que vivemos em uma sociedade tecnológica, onde a tecnologia permeia o cotidiano. Dessa forma, a tecnologia faz parte da vida das pessoas tanto nos setores urbano quanto nos setores rurais, tornando-se uma ferramenta de aprendizagem.

Brito e Purificação definem,

> [...] educação e tecnologia como ferramentas que podem proporcionar ao sujeito a construção de conhecimento, preparando-o para que tenha condições de criar artefatos tecnológicos, operacionalizá-los e desenvolvê-los. Ou seja. estamos em um mundo no qual as tecnologias interferem no dia a dia e, por isso, é importante que a educação também envolva a democratização do acesso ao conhecimento, à produção e à interpretação das tecnologias (BRITO; PURIFICAÇÃO, 2012, p. 23).

Com isso, inferimos que a tecnologia poderá contribuir para que o estudante tenha acesso ao conhecimento de maneira mais dinâmica, contribuindo na construção e consolidação de conceitos. O uso do *software GeoGebra* poderá contribuir para que estudantes da licenciatura em Matemática possam aprender conceitos matemáticos ou aprofundá-los numa perspectiva diferente do paradigma do exercício, o que poderá ajudar na sua formação profissional e nas suas futuras práticas pedagógicas.

Segundo Borba, Silva e Gadanidis (2015) o *GeoGebra* é um *software* dinâmico multiplataforma de distribuição gratuita que poderá ser usado em todos os níveis de ensino. Por meio dele, é possível trabalhar com diversos tipos de funções, objetos geométricos, análise estatística.

O *GeoGebra* poderá contribuir para que o estudante possa fazer comparações de diferentes objetos ao mesmo tempo, ou ver detalhes que não seria possível no papel e lápis ou materiais manipuláveis. Sobre isso, Borba, Silva e Gandanidis (2015) reforçam a importância do uso de tecnologias digitais para facilitar o aprendizado, por isso eles defendem a importância da elaboração de atividades matemáticas pautadas em tecnologias digitais como o *GeoGebra*. Ainda salientam a importância do uso dessas tecnologias na formação de professores, uma vez que estes poderão, em ambiente de sala de aula, proporcionar um processo de ensino e aprendizagem significativo e dinâmico para os estudantes.

3. Metodologia

Inicialmente a sequência foi projetada para ser aplicada em duas aulas de cinquenta minutos cada. Entretanto, na prática precisamos de quatro aulas, sendo duas aulas em um encontro e duas no segundo encontro. No primeiro encontro trabalhamos o conceito de tangente no triângulo retângulo utilizando a Régua Trigonométrica e o *GeoGebra*; no segundo encontro foi trabalhado o conceito de função tangente, com o auxílio do *software* de geometria dinâmica. É importante lembrar que no primeiro encontro, desenvolvemos nossa sequência no laboratório de informática e o segundo encontro, foi realizado na própria sala de aula dos alunos.

No primeiro encontro, iniciamos apresentando a Régua Trigonométrica para que os alunos se familiarizassem com o material manipulando-o. Como tínhamos 17 exemplares da Régua Trigonométrica e um total 30 alunos, pedimos para trabalharem em dupla. Em seguida direcionamos a atenção dos alunos para os conceitos de seno e cosseno, com o intuito de retomar o que tinham vivenciado com a sequência anterior. A partir de então, começamos a explorar a ideia da reta tangente na Régua Trigonométrica e estudando o comportamento de alguns ângulos para verificarem como podemos determinar os valores relativos ao seno, cosseno e tangente.

Feito isso, pedimos para que os alunos preenchessem um quadro, como mostra a Figura 2, utilizando a Régua Trigonométrica. O intuito do preenchimento da tabela era para que os alunos percebessem que é possível determinar os valores para a tangente, a partir da divisão do valor do seno pelo valor do cosseno.

Figura 2: Quadro para ser preenchido a partir das relações observadas na Régua Trigonométrica

x	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
senx								
cosx								
tgx								

Fonte: Situação da sequência de ensino.

Nesse momento alguns alunos tiveram algumas dificuldades em manipular o material, o que do nosso ponto de vista já era esperado, pois foi o primeiro contato com a Régua Trigonométrica. Um dessas dificuldades mais frequente entre os alunos foi observar as relações nos ângulos de 0° e 90°.

Com relação a tangente de 90° uma das duplas, que denominamos por Dupla A, não conseguiu chegar na resposta e nos fez um questionamento que possibilitou o diálogo a seguir:

Dupla A: Qual o valor da tangente de 90°?

Pesquisadores: Vamos observar na Régua Trigonométrica. Qual o valor da tangente de 90°?

Dupla A: Não dar para identificar, porque essa reta que a gente acha o valor da tangente (apontando na Régua Trigonométrica) não toca na reta tangente.

Pesquisadores: Certo. Então me fale o valor da tangente do ângulo de 45°.

Dupla A: É 1.

Pesquisadores: Porque é 1?

Dupla A: Porque essa reta que a gente usa para achar a tangente toca na reta tangente no valor 1.

Pesquisadores: Certo. E a tangente de 90°?

Dupla A: Não dá para saber porque essa reta aqui na Régua Trigonométrica não toca na reta tangente.

Pesquisadores: Então... se não toca, o que podemos garantir?

Dupla A: Se não toca é porque não vai ter tangente.

Pesquisadores: Mesmo se eu prolongar essa reta (apontando na Régua Trigonométrica) ela não irá tocar na reta tangente?

Dupla: Sim, mesmo prologando.

> **Pesquisadores**: Podemos observar outro ângulo que satisfaz a mesma situação do ângulo de 90°?
>
> **Dupla**: O de 270°.

Esse diálogo nos permitiu observar que esta dupla não tinha construído o conceito que para os ângulos de 90° e 270° ou ângulos côngruos não existe o valor para a tangente. Entretanto, podemos inferir que a manipulação da Régua Trigonométrica proporcionou a essa dupla fazer as observações, percebendo que nesses ângulos acontecia alguma coisa que eles ainda não estavam entendendo.

Após o contato dos alunos com o material manipulável e com a tabela preenchida, levantamos o seguinte questionamento:

> **Pesquisadores:** Observando os valores do seno, cosseno e tangente na tabela, podemos determinar alguma relação para os valores da tangente? Qual a relação?

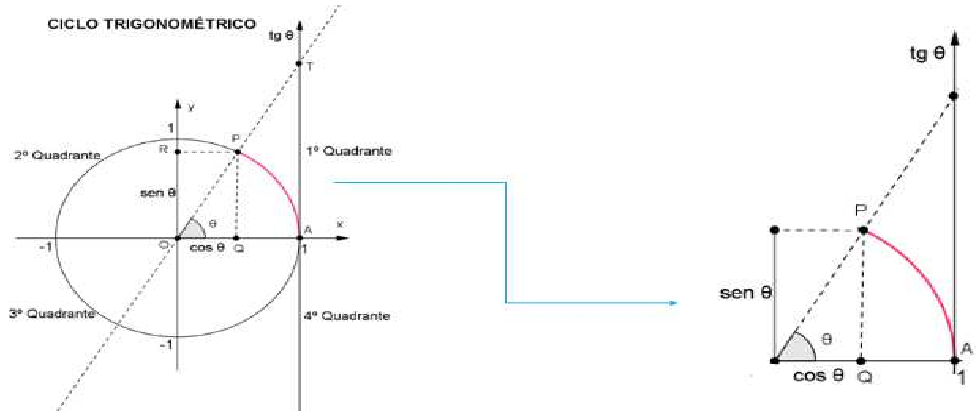
Após esse questionamento, um dos alunos, que denominamos de Aluno João, respondeu:

> **Aluno João**: Podemos sim estabelecer uma relação, a tangente é o seno dividido pelo cosseno.

Em outras palavras, o aluno João nos afirmou que para encontrarmos a tangente de um ângulo, devemos dividir o seno desse ângulo pelo valor do cosseno desse ângulo, ou seja, $tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$. Não podemos garantir que esse argumento apresentado pelo aluno foi feito após a observação na tabela ou se ele já tinha esse conceito construído. Porém, a partir da resposta apresentada e da relação $tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$, discutimos com os graduandos o conceito de tangente no triângulo retângulo, ou seja, *a tangente de um ângulo θ é dada pela divisão do cateto oposto pelo cateto adjacente*.

Para nortear a discussão, partimos da Figura 3 para chegarmos nas relações apresentadas.

Figura 3: Ciclo Trigonométrico



Fonte: Construção feita pelos autores.

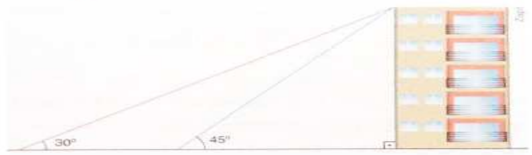
Dando continuidade à sequência, em particular a ideia conceitual da tangente no triângulo retângulo, iniciamos a aplicabilidade do conceito, afim de verificar se os alunos de fato compreenderam a relação $tg(x) = \dfrac{sen(x)}{\cos(x)}$.

Após essa verificação e com os conceitos da tangente no triângulo retângulo formalizados, resolvemos coletivamente algumas questões que faziam parte de uma lista de exercícios, disponibilizada com antecedência para os graduandos por e-mail. A Questão 04 (Figura 4), foi uma das questões que resolvemos juntamente com os alunos que mostraram ter compreendido a aplicação dos conceitos envolvidos necessários para chegar a resposta. Assim, contribuíram efetivamente na solução, que ao final foi respondida com base nas suas afirmações.

Figura 4: Questão 4 da lista de exercícios

De um ponto de observação localizado no solo, vê-se o topo de um edifício em um ângulo de 30 °. Aproximando-se 50 m do prédio, o ângulo de observação passa a ser de 45°. Determinar:

a) A altura do edifício;
b) A distância do edifício ao primeiro ponto de observação.



Fonte: Iezzi (2013).

Para finalizarmos o primeiro encontro, buscamos introduzir, com o auxílio do *software GeoGebra*, uma ideia de função tangente. Para isto, partimos da Questão 07 (Figura 5) da lista de exercícios.

Esta questão tinha como objetivo principal a construção do ciclo trigonométrico e observação do movimento da reta *s*, quando o ângulo principal (AÔB) fosse mudando de valor no período [0, 2π] e, além disso, que fizessem uma relação com a Régua

Trigonométrica. Com essa atividade a "Dupla A", aquela que teve dúvidas a respeito da tangente dos ângulos de 90° e 270° e seus correspondentes, observou que não existe o valor da tangente desses ângulos.

Figura 5: Questão 7 da lista de exercícios

7. Com auxílio do software GeoGebra, faça o que se pede:

a) Construa uma circunferência centrada na origem e de raio 1;
b) Crie um ponto O de coordenadas (0,0);
c) Crie um ponto A de coordenadas (1,0).
d) Crie um ponto B sobre a circunferência.
e) Trace uma reta perpendicular ao eixo x passando por A. Nomear como reta r.
f) Trace uma reta OB. Nomear como reta s.
g) Crie um ponto C na interseção da reta OB com a reta r.
h) Crie arco circular centrado em O e de extremidades A e B (mude a cor e a espessura do arco AB).
i) Marque o ângulo $A\hat{O}B$, e o nomear como α.
j) Movimente o ponto B.
k) O que acontece com a reta s quando $\alpha = 90°$?
l) O que acontece com a reta s quando $\alpha = 180°$?
m) O que acontece com a reta s quando $\alpha = 270°$?

Fonte: Lista de exercício da sequência de ensino.

Após as duplas terminarem a Questão 7 que possibilitava a construção do ciclo trigonométrico e seus questionamentos terem sido respondidos, pedimos para salvarem a construção e que enviassem para seus próprios e-mails. Esse comando foi dado para que eles pudessem complementar com a segunda parte da Questão 7 (Figura 6) a qual foi realizada no segundo encontro.

Nosso segundo encontro iniciamos a aula questionando-os sobre as perguntas contidas na Questão *7*, precisamente sobre a construção do gráfico da função tangente, em busca de ideias que possibilitassem a construção da definição. Apesar da pouca participação por parte dos graduandos, tivemos algumas falas interessantes que deram suporte necessário para discutirmos e construir, coletivamente, a definição.

Antes de chegarmos a definição, apresentamos quatro modelos de função tangente: $f(x) = tg(x.a)$; $g(x) = a.tg(x)$; $h(x) = tg(x + a)$ e $t(x) = a + tg(x)$, sendo a um número inteiro, no intervalo de [-5; 5]. Utilizando um computador projetado com o *datashow*, fomos observando o que acontecia de especial em cada função a cada alteração do valor de *a*. Em seguida, foi indispensável para a construção de gráficos, relacionados a função tangente, a utilização do lápis e papel.

Figura 6: Segunda parte da questão 7

A partir da atividade 7, vamos construir o gráfico da função tangente.

1. Exiba "Janela de Visualização 2";
2. Clique com o botão direito do mouse na Janela de Visualização 2, clique na Opção "Janela de Visualização", vá na aba "EixoX", altere a "Distância" para $\frac{\pi}{2}$;
3. Na "Janela de Visualização 2", crie o ponto D sobre o eixo-x com abcissa do ponto B;
4. Na "Janela de Visualização 2", crie um ponto E de abcissa igual ao comprimento do arco AB e ordenada igual à ordenada do ponto C;
5. Habilite o rastro do ponto E;
6. Mova o ponto B;
7. O que acontece durante a trajetória do ponto E?

   ____

   ____

   ____

8. Crie uma função $f(x) = \text{tg}\,(x)$;
9. Anime o ponto B;
10. O que acontece com o ponto E?

   ____

   ____

Fonte: Lista de exercício da sequência de ensino.

Percebemos que essa questão possibilitou um melhor entendimento para a definição de função tangente, pois não queríamos apresentar imediatamente a sua definição. Nosso objetivo, durante todo esse processo desde o primeiro encontro, era possibilitar aos estudantes condições para que construíssem seus próprios conceitos.

Portanto, com o trabalho desenvolvido com os alunos a respeito do conceito de função tangente foi possível elaborar junto com eles uma possível definição, o que não demostrou ser uma barreira para a aprendizagem.

Assim, como no primeiro encontro, disponibilizamos com antecedência a segunda lista de exercícios. Uma das questões, pedia que construíssem o gráfico da função $f(x) = 1 + tg(x)$. Percebemos que não houve dificuldade para a construção, uma vez que utilizaram os conceitos construídos com base nos exemplos apresentados anteriormente.

4. Resultados

A partir da utilização da Régua Trigonométrica e do *software* de geometria dinâmico *GeoGebra*, observamos o ânimo e a disposição dos alunos ao trabalharem com tais ferramentas. Mediante a aceitação desses recursos conseguimos obter resultados que consideramos positivos, visto que todos as duplas trabalharam e concluíram todas as etapas da sequência de ensino.

A princípio, foi observado que a Régua Trigonométrica é uma ferramenta pedagógica que pode contribuir para a construção de conceitos trigonométricos, neste caso, possibilitou que os estudantes da graduação a compreensão do conceito da função tangente. Pelos relatos apresentados, fica evidente que os graduandos não conheciam o material. Porém, apesar de alguns estudantes apresentaram dificuldades no início para manusear a Régua Trigonométrica, o que nos pareceu razoável por ser novidade para eles, todos conseguiram encontrar os valores do seno, cosseno e tangente, levantando hipóteses, afirmações e conclusões.

Apesar do sucesso do material manipulável, surgiram indagações por parte dos alunos. No entanto, prevendo essa situação e com a intenção de introduzir a ideia do conceito de função tangente, sem os moldes tradicionais, nos dispusemos ao uso do *GeoGebra*.

5. Conclusões e/ou Propostas

Mediante ao que foi produzido, das observações feitas ao longo das aulas e das falas dos discentes consideramos que a sequência obteve alcance dos objetivos postos inicialmente. Apesar disto, reconhecermos que existem outras possibilidades para trabalhar com os conceitos trigonométricos, em particular tangente, por exemplo, a construção da Régua Trigonométrica utilizando régua e compasso. Essa possibilidade foi evidenciada nas experiências vivenciadas por Lôbo e Jesus (2014), que mostram que quando o aluno constrói a Régua Trigonométrica, é possível descobrir e inferir sobre o valor do seno, cosseno e tangente de um determinado ângulo, dando significado ao que na maioria das vezes aprende por meio de regras, de memorizações ou até de música para os ângulos de 30°, 45° e 60°, sem necessariamente compreender.

Durante o desenvolvimento da sequência de ensino percebemos como a combinação do material manipulável e da tecnologia, o *software GeoGebra*, foi importante para o desenvolvimento da construção do conhecimento, em particular os conceitos de tangente e de função tangente, tanto por parte dos alunos da graduação quanto por nós alunos do PPGEM.

6. Referências Bibliográficas

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R.; GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: Sala de Aula e Internet em Movimento**. 1ª Ed.; 1ª reemp. – Belo Horizonte: Autêntica Editora. 2015.

BRITO, G. S.; PURIFICAÇÂO, I. **Educação e Novas Tecnologia: Um Repensar**. Curitiba, Intersaberes. 2012.

IEZZI, G... [et al]. **Matemática: ciências e aplicações**. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

LOBO, W. S.; JESUS, G. B. **Inequações Trigonométricas: Uma Proposta de Intervenção Mediada Pela Régua Trigonométrica**. 2014.

Recebido em Outubro 2018

Aprovado em Dezembro 2018