Das Experiências Docentes à Ação: Elaboração de Objetos Virtuais para Aprendizagem do Conceito de Limite de Funções

Antonio José da Silva[1]
Fernando Becker[2]

Resumo: A criação de objetos de aprendizagem com o software Geogebra é resultado de uma investigação realizada com professores. Levou-se em consideração experiências de docentes de educação básica e superior sobre o ensino de limite e também seus conhecimentos matemáticos sobre essa base teórica. Os professores responderam um questionário que versava sobre as possibilidades para o ensino de limite de funções. Neste artigo é apresentado os resultados e validado um objeto de aprendizagem para auxiliar no estudo das noções iniciais de limite de funções a partir de áreas. A validação foi realizada por alunos do ensino superior ao reconhecerem noções de limite contidas nas atividades propostas.

Palavras-chave: Objetos de Aprendizagem, matemática, Geogebra

INTRODUÇÃO

Aproximar, comparar, seccionar, unificar, agrupar, variar, mensurar, retirar, são verbos que expressam esquemas de ação necessários ao processo de adaptação do sujeito a seu meio físico e social de que trata a Epistemologia Genética (BECKER, 2012). Como verbos expressam mais do que simples esquemas; expressam operações ou ações interiorizadas. São formas de operar temas amplamente discutidos na educação básica como: área de figuras planas, volumes, sequências numéricas, funções, esses foram alguns temas citados. Mas, por motivos diversos, os alunos mostram dificuldades em tematizar essas operações. Por isso, não conseguem inferir ou deduzir conceitos do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), (KESLER, 2008, NOTARE, BEHAR, 2009, BIZELLI; FISCARELLI; BARROZO, 2010; FERNANDES et al., 2012). Tratar a noção de limite, com áreas de figuras regulares inscritas na circunferência, sugere uma

[1] Licenciado em Matemática pelo Centro Federal de Educação Tecnológica do Maranhão (2004), hoje IFMA. Especialista em Fundamentos de Matemática pela Universidade Estadual do Maranhão (2006). Mestre em Engenharia de Eletricidade pela Universidade Federal do Maranhão (2009). Doutorando em informática na Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS. Professor Adjunto da UFMA. E-mail : antoniojsilva@ufma.br

[2] Graduado em Filosofia Licenciatura - Faculdades Anchieta (1971), mestre em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (1976) e doutor em Psicologia Escolar e do Desenvolvimento Humano pela Universidade de São Paulo (1984). É professor titular (1995) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Professor Permanente do Doutorado em Informática na Educação - UFRGS. E-mail: fernando.becker@ufrgs.br

relação íntima com a noção de integral definida, visto que o pressuposto é o mesmo, somar infinitas partes mínimas. A constatação desse procedimento observado nos registros feitos por docentes, além de demonstrar que há tecnologias sendo operadas com sucesso para fins educacionais, indicam que há no plano didático um problema relativamente estabilizado visando o ensino, e sua abordagem por intermédio de tecnologias aproxima o aluno da prática (FAGUNDES; SATO; MAÇADA, 1999).

A questão problema que norteia esta pesquisa é conhecer, pela visão dos docentes, as situações ou conhecimentos matemáticos da educação básica que auxiliam na conceituação de limite de funções de uma variável real. Pretende-se, a partir dessas informações, elaborar objetos de aprendizagem (OA) e nesta pesquisa, faremos a descrição e validação de um desses OA para conhecer as noções apresentadas pelos alunos em processo de interação.

O estudo das práticas e análise de experiências docentes é algo que já foi estudado. Em Rocha (2008) uma pesquisa foi feita com docentes a partir de um curso de extensão visando compreender as práticas docentes e como ocorre o uso de tecnologias educacionais, em específico o Geogebra. Santos et al. (2014) em sua pesquisa sobre a seleção e uso de tecnologias digitais como recursos pedagógicos, concluiu que o Geogebra contribui para o desenvolvimento do senso crítico de estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática. Fernandes et. al (2012), desenvolveram e validaram um sistema *web* (SCDI) que, além de conter teoria do CDI, permite realizar operações. Verificou-se que tal utilização resultou em melhorias significativas de aproveitamento dos alunos em relação aos resultados da disciplina. O CDI tem na tecnologia o meio para o entendimento gráfico e a busca de soluções mais complexas, e para isso, vale-se das funcionalidades dessas tecnologias.

O problema da aprendizagem do cálculo já foi estudado e retratado em Barufi (1999); ele descreve que o baixo índice de aprovação em Cálculo pode ser um importante fator, não somente de retenção e evasão, mas, também, de desestímulo àqueles que poderiam escolher os cursos nos quais o tema ou disciplina é ministrado. Para Rezende (2003), o ensino de cálculo é estudado promovendo dois mapeamentos que visam o levantamento e o entendimento de dificuldades de natureza epistemológica; ele destaca ainda que o problema do "fracasso do cálculo" não é um fenômeno isolado, pois é retratado em vários trabalhos da comunidade científica no exterior.

Tratar problemas relativos à aprendizagem matemática é também compreender o processo de comunicação; dando a ele a devida importância diminuem-se os problemas com a interação sujeito-objeto (MACHADO, 1993). Em Kessler (2008), discute-se a criação de material didático e estratégia de ensino com utilização de objetos de aprendizagem em CD-ROM. Verificou-se que a produção de material em multimídia, além de colaborar na aprendizagem do Cálculo, contribuiu também com a problematização dos processos de ensinar e aprender no ensino superior. Em Notare e Behar (2009), descreveu-se uma experiência de aprendizagem de CDI por meio de um ambiente virtual de aprendizagem com suporte para escrita científica. Segundo a pesquisa, ao realizar as atividades propostas no ambiente virtual, os alunos permaneceram envolvidos com os estudos de CDI.

Nesta pesquisa quer-se identificar, pela experiência de docentes, conteúdos e situações didáticas para a elaboração de objetos digitais para aprendizagem (OA) que possibilitem o desenvolvimento do conceito de limite de função em um ambiente virtual, acessado por dispositivos fixos ou móveis. A elaboração desses OA ocorrerá pela associação do Geogebra com a tecnologia *Google Drive*. A validação ocorrerá com a análise dos registros realizados nos formulários do *Google Drive* após a interação entre o aluno e o *applet* (ver 4.2) do Geogebra.

TECNOLOGIAS E ENSINO DE MATEMÁTICA

O Geogebra é um *software* livre de matemática e multiplataforma com licença de distribuição *creative comons* (cc). Desperta cada vez mais interesse de professores dos diversos níveis devido à sua ampla utilização (ROCHA, 2008, SANTOS, BARCELOS, BATISTA, 2014). É possível utilizá-lo por manipulação simbólica, programação em linha, desenho de estruturas geométricas e planilhas. Oferece uma estrutura gráfica que permite visualizar construções e gráficos em duas ou três dimensões. Os arquivos gerados pelo Geogebra possuem extensão ggb. Por serem desenvolvidos em ambiente Java, são facilmente manipuláveis em estruturas de ambientes desenvolvidas tanto em PHP quanto em HTML. Os desenvolvedores desse programa mantêm, na rede mundial de computadores, o Geogebratube, que é um repositório para os *applets* desenvolvidos pelos usuários do Geogebra.

Neste trabalho, trata-se a atividade como uma situação-problema. Para Dolle (2011, p. 13), “É colocando o aluno diante de situações-problema que ele é solicitado a construir sua solução e, assim, a fornecer a explicação para estas”. As atividades são tratadas como elementos que possibilitam a aprendizagem dos alunos frente aos conteúdos da disciplina CDI. No ensino básico a abordagem de elementos do Cálculo é condicionada a exigências curriculares nos estados. Já no ensino superior, essa disciplina é necessária para os cursos das ciências exatas e alguns cursos das ciências humanas, sociais e biológicas. Mesmo com toda importância aqui retratada, os fundamentos do CDI são minimamente tratados na educação básica e, quando tratados, destacam-se pelo seu significado enciclopédico, enfatizados pela técnica e operações algébricas muitas vezes impraticáveis.

É preciso pensar na formação intelectual do aluno, garantindo-lhe condições de desenvolvimento cognitivo. A tarefa de um docente nesse propósito não pode estar limitada ao simples ato de transmitir conhecimento, como já criticava Piaget, (PIAGET, 1977), mas ao processo complexo de aprendizagem do aluno. Cabe ao docente também compreender que importante não é decorar conceitos e definições, mas gerar questionamentos, ampliar as ideias e construir conceitos – um conceito construído a memória retém, um conceito decorado é rapidamente esquecido. Para Becker (2012, p. 135), é preciso: “relativizar o ensino em função da aprendizagem”. A citação é um alerta na formação do aluno, e que a sala de aula seja um espaço para os questionamentos, respostas, cooperação, verdadeiros desafios para a construção de conhecimento. As novas capacidades, ou estruturas de conhecimento, só surgem à medida que mobilizamos as já existentes exigindo delas respostas à situação de desequilíbrio provocada pela assimilação de um novo conteúdo. A acomodação ou resposta do sujeito, modificando esquemas assimiladores, completa o processo de construção de conhecimento.

A atividade docente da sala de aula tem função, se vislumbrada pela ótica da epistemologia genética, não somente como promotora ou gestora do espaço da sala de aula, mas também como pesquisadora de seus alunos. Ao considerar a sala como laboratório de pesquisa, e a pesquisa como atividade inerente à docência, o professor toma consciência que esse espaço deve representar um laboratório também para seu aluno, e como tal deve ser objeto de sua pesquisa (BECKER; MARQUES, 2012).

MATERIAIS E MÉTODOS

A pesquisa mobilizou professores e alunos. Para agir diretamente na problemática aqui tratada, foram obtidos dados sobre os conhecimentos necessários para conceituar limite de funções a partir da visão docente. Esses dados foram obtidos por meio de um questionário online. Participaram da pesquisa 24 (vinte e quatro) professores dos ensinos básico e superior em um evento de formação docente no Campus de UFMA de Pinheiro, mas somente 18 (dezoito) concluíram as atividades e autorizaram a participação na pesquisa. Os dados foram coletados e organizados por meio da tecnologia *Google Drive*. Após análise das respostas foram elaborados diversos *applets* com auxílio do software Geogebra, e disponibilizados no Geogebratube sob a licença *cretive commons* 2.0.

A metodologia para a validação dos *applets* consiste na análise das respostas dadas por alunos a uma situação-problema proposta por um docente como uma atividade complementar à disciplina CDI, concluída por 30 alunos. Para a análise serão utilizados os fundamentos da Epistemologia Genética. Tanto os *applets* quanto os formulários de registro das respostas foram disponibilizados online em objetos de aprendizagem contidos no site http://geogebra.nasnuvens.net.br, para que, por ocasião da interação entre o aluno e os *applets*, as respostas fossem registradas livremente e até mais de uma vez se assim o aluno desejar ou se for conveniente à proposta didática. Neste estudo será feita a validação de uma atividade para estudo da noção de limite de funções no caso de áreas.

DESCRIÇÃO DO *APPLET*

Falando sobre conhecimento científico, e sua não linearidade, nas conclusões do livro *A tomada de consciência*, Piaget (1977. p. 211) revela o que considera um acordo do pensamento com o real: “[...] a ação procede das leis de um organismo que é ao mesmo tempo um objeto físico entre os outros e a fonte do sujeito que age e, depois pensa”. Condiciona, assim, a construção do conhecimento à ação entre sujeito e objeto. Esse pensamento fundamenta a construção de *applets* para trabalhar com alunos na educação básica e no ensino superior.

As atividades sobre as noções de limite abrangem temas como áreas e sequências. Serão exigidos alguns esquemas de comparação, aproximação; a dedução deverá depender da qualidade da inferência realizada e da assimilação ou não do problema.

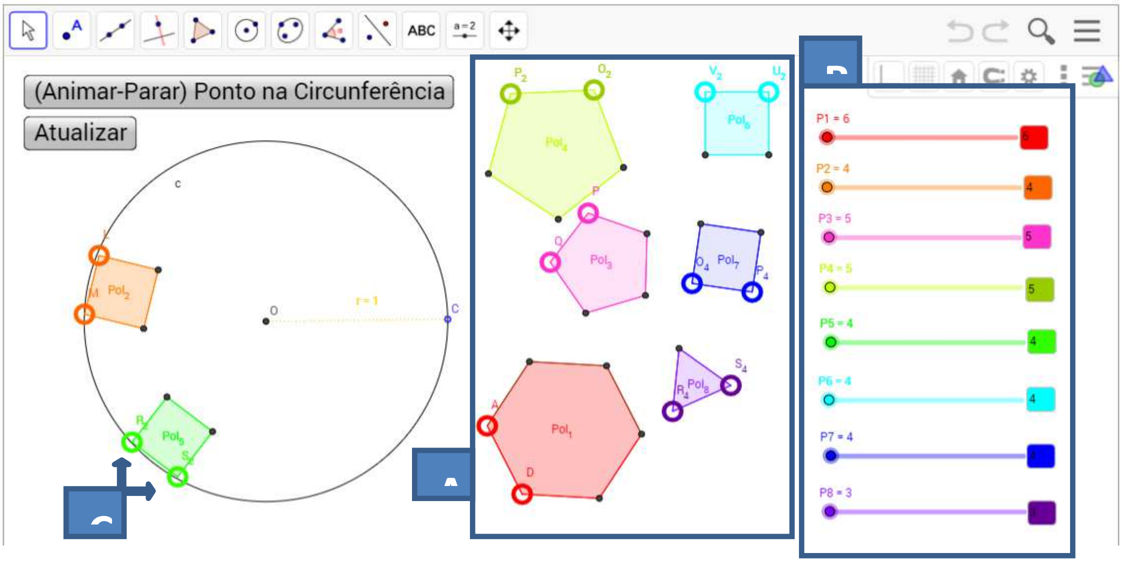

Figura 1: Interface de OA$_1$ da Atividade 1.

A Figura 1 corresponde à interface do *applet* que será utilizado e estudado nesta pesquisa, o *applet* foi disponibilizado no seguinte endereço: http://geogebra.nasnuvens.net.br/atividades/a01/. Nesse endereço tem um OA que combina *applet* do Geogebra, para auxílio na compreensão da situação-problema, e formulário da tecnologia *Google Drive* para coleta de registros escritos. A proposta desta atividade é permitir que o aluno relacione a forma entre figuras geométricas e aproximando-as por comparação, possa assim, diferenciá-las por suas áreas. Nesta atividade ele poderá: variar os polígonos pelo comprimento e número de lados. Na Figura 1, o campo descrito como “**B**” possui controles deslizantes e entrada de valores que ao serem manipulados implicam na variação do número de lados dos polígonos regulares contidos no campo “**A**” e nos polígonos contidos no interior do círculo. O comprimento do lado está em função da aproximação entre dois vértices de cada figura, destacado no campo “**C**”. Para o preenchimento da área do círculo por figuras geométricas regulares o aluno poderá comparar as áreas por sobreposição, tendo como objetivo diminuir as diferenças entre as áreas do círculo e dos polígonos regulares. A sobreposição poderá ocorrer com apenas uma única figura, fazendo seus lados variar de 3 até infinitos lados em tese, mas limitados no *applet*. Caso ocorra a variação do número de lados, a implicação direta é ter uma sequência de polígonos distintos com áreas distintas. Caso ocorra a variação do comprimento do lado mantendo fixo o número de lados, a implicação será a variação da área. É interessante destacar que a área ocupada por cada polígono dependerá do comprimento dos lados, fundamental para caracterizar a área como uma função. O *applet* do OA possui animação, mostrando que em toda a extensão da circunferência há pontos.

Investigando uma noção de Limite: nesta atividade, o aluno deverá se posicionar a seguinte situação-problema: Admitindo ser possível construir figura(s) geométrica(s) regular(es), no interior de uma circunferência de raio unitário ou fora dela, é possível estimar a área do interior dessa circunferência por meio de figura(s) geométrica(s) regular(es)? Justifique sua resposta. Diante dessa situação-problema, aluno e *applet* deverão interagir e caberá ao aluno registrar livremente sua resposta em espaço do formulário *Google* contido na página. A análise da resposta subsidiará a análise docente objetivando identificar questões para aprofundamento. Este *applet* pode ser utilizado tanto no ensino básico quanto na educação superior. O *applet* além de possibilitar que o aluno extraia características, para a conceituação de limite, possibilita, pela leitura de registros, a compreensão do docente sobre como o aluno argumenta ou mobiliza capacidades ou estruturas cognitivas para responder à situação-problema.

Conhecimento Matemático: Seja P_n um polígono regular com $n \geq 3$ e $l > 0$ o comprimento do lado de P_n. Seja $A(C)$ a área de um círculo C de raio r e $A(P_n)$ a área de P_n. Se $n \to \infty$ então $A(P_n) \to \infty$. Dado um n qualquer, se $l \to \infty$ então $A(P_n) \to \infty$. Se $n \to \infty$ e $l \to 0$, então $|A(C) - A(P_n)| \to 0$. A implicação da diferença conforme foi estabelecida anteriormente, é aceitável considerando que P_n está inscrito em C. Seja S_i a área de C resultante da diferença entre C e a área de P_n interna a C, e quando $S_i \to 0$, $A(P_n) \to A(C)$. P_n pode estar circunscrito em C, e S_e será a soma das áreas de P_n exteriores á circunferência C, caso $S_e \to 0$, $A(P_n) \to A(C)$. No entanto, nada impede que os vértices sejam localizados na parte exterior da circunferência com os lados de P_n secantes em C, nesse caso, a aproximação das áreas ocorrerá por diferenças entre S_e e S_i, se $|S_e - S_i| \to 0$, então $A(P_n) \to A(C)$.

É necessário o entendimento da área de um polígono P_n definido como uma função cuja variação depende do comprimento do lado l. Eis procedimentos e conhecimentos contidos no AO; o aluno deverá:

C1. Estimar a área do círculo pela diferença entre sua área e a área do polígono P_n em razão de comparações visuais. (Sobreposição de figuras).

C2. Realizar a estimativa com um polígono inscrito;

C3. Realizar a estimativa com um polígono circunscrito;

C4. Realizar a estimativa com um polígono, mas decomposto de triângulos;

C5. Realizar a estimativa com vários polígonos;

C6. Compreender que se $n \to \infty$ então $A(P_n) \to \infty$;

C7. Compreender que dado um n qualquer, se $l \to \infty$ então $A(P_n) \to \infty$;

C8. Concluir que se $n \to \infty$ e $l \to 0$, então $|A(C) - A(P_n)| \to 0$, se e somente se P_n estiver inscrito na circunferência;

C9. Concluir que se $S_i \to 0$, $A(P_n) \to A(C)$;

C10. Concluir que se $S_e \to 0$, $A(P_n) \to A(C)$;

C11. Concluir que se $|S_e - S_i| \to 0$, então $A(P_n) \to A(C)$.

Desses conhecimentos é possível estabelecer diversas relações R de conhecimentos (ver seção 4.2). Da interação entre sujeito e esse objeto, é possível determinar diversas abordagens para auxiliar a conceituação de limite de funções e integral definida.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Apresentaremos a pesquisa com os docentes e a validação pela análise dos registros de respostas realizados em um dos *applets* elaborados.

PESQUISA DOCENTE

Dos 18 (dezoito) professores participantes, 17 (dezessete) são licenciados em matemática e um é licenciado em Física. São professores que lecionam matemática na educação básica ou no ensino superior. Nesta pesquisa responderam professores graduados, especialistas e mestres. A análise segue após as perguntas:

1 - Que assuntos tu lecionas no Ensino FUNDAMENTAL? Pensas que podes, de alguma forma, ajudar o aluno a compreender o conceito de “limite de funções”? Em resposta a essa pergunta muitos professores elencaram conteúdos com conceitos matemáticos necessários para operacionalizar limite de funções. Da análise das respostas foi possível identificar que os temas e conteúdos são: elementos da geometria do 7º ano, equações e sistemas de equações, estudo de funções, razão e proporção entre grandezas, estudo de polinômios, identidades algébricas, fatoração, simplificação de

frações algébricas, conjunto, potenciação, radiciação. Os registros tratam de conhecimentos matemáticos que os docentes referenciam de acordo com suas práticas. Mas também foi possível elencar outras respostas que melhor direcionam para a nossa problemática, eis algumas: velocidade e aceleração instantânea, inequação, estudo de áreas de figuras não regulares através de soma de figuras regulares, área das figuras planas, números racionais, distância e cálculo algébrico, gráficos. Os tópicos de matemática elencados são importantes tanto para desenvolvimento de noções e conceitos quanto técnica operatória. Desenvolver intuitivamente limite de funções constitui-se uma prática constante nos livros científicos (FLEMMING; GONÇALVES, 2007; GUIDORIZZI, 1985; STEWART, 2013). O estudo da aproximação entre áreas foi o tema mais citado e justificado, justamente por ser um tema tão próximo de uma formação anterior na memória do discente, faz parte das estruturas cognitivas pré-formadas na educação básica. Desenvolver o conceito de limite de funções por intermédio do estudo da aproximação entre áreas de polígonos regulares em áreas não regulares pode ser uma alternativa tanto para trabalhar limites quanto para tratar do conceito de integral definida. Velocidade e aceleração instantânea dá ao limite de funções um caráter transdisciplinar, e muito enraizado na origem do CDI.

2 – Tu acreditas que os alunos concluem o ensino médio com conhecimentos suficientes para aprender o conceito de limite de funções em disciplinas de cálculo no ensino superior? Fundamente sua resposta, por favor. A grande maioria dos professores entrevistados acredita que os alunos concluem o ensino médio sem formação adequada para aprender o conceito de limite; o que é um problema substancial pois sem as estruturas cognitivas prévias e necessárias o processo de aprendizagem do conceito de limite torna-se um processo cada vez mais inalcançável. Em geral os professores acreditam ser quase impossível os alunos concluírem o ensino médio com os conhecimentos essenciais ao conceito de limite de funções, pois o currículo é muito extenso e o tempo curto não permite uma aprendizagem sólida. Eis algumas respostas: "*Não, porque os alunos chegam ao ensino superior com base ruim, então há dificuldade para apreender*". Uma outra fala interessante reflete sobre o ensino de funções na educação básica e o estudo de limites no ensino médio e superior quando diz que os conteúdos são tratados dissociados, e que cabe uma outra abordagem para explorar o comportamento de funções com enfoque na noção de limite. Essa opinião

corrobora a intensão de trabalhar a noção intuitiva de limite com *applets* que sirvam de auxílio às aulas de matemática. É interessante também notar que na fala dos docentes há uma atribuição de responsabilidade pela aprendizagem à prática docente, como na fala: "*Não chegam preparados, a grade curricular é extensa e tem alguns conteúdos que os professores acreditam que não seja tão necessário repassar*". Apesar de alguns professores acreditarem que o tempo seja um fator para administrar o currículo, há quem discorde e acredite na possibilidade pela regulação de atividades planejadas pelo docente.

3 – Que assuntos tu lecionas no Ensino Médio e que de alguma forma pode ajudar o aluno a compreender o conceito de limite de funções? Em resposta pode-se destacar: funções polinomiais e seus gráficos, estudos dos sinais de funções, intervalos, distância, função exponencial, conjuntos; polinômios e equações polinomiais; função logarítmica. Em especial, os docentes afirmam ser necessário o domínio do conceito de função para conceituar limite de funções. As funções exponenciais e logarítmicas ajudam a explorar o conceito de infinito no âmbito das funções. Percebe-se que o estudo sólido e bem direcionado sobre funções, favorece a aprendizagem do conceito em estudo, pois, segundo destacam os docentes, é um fundamento desse conceito, "[...] o conceito de limite é o estudo do comportamento do valor de uma função quando os valores de seu domínio se aproximam de um outro valor, sem necessariamente que a distância entre esses valores seja zero", assim diz um docente.

4 – Que assuntos ou tópicos de matemática, do ensino fundamental e médio, o conceito/noção de limite de funções pode ser apresentado aos alunos ou até mesmo aprendido por eles? A partir desse questionamento foi possível observar algumas situações didáticas importantes: sequência de números racionais com numerador unitário e denominadores cada vez maiores ou menores, progressão geométrica infinita, velocidade, aceleração, funções trigonométricas, enfim são destacadas as sequencias numéricas de modo geral, com situações que tornam possíveis a análise de valores e a predição destes.

Ações concretas sobre esses conteúdos conduzem às operações mentais que podem possibilitar a conceituação de limite de funções. Propomo-nos a problematizar essas situações e conteúdos destacados, com o auxílio de *applets* do Geogebra em um ambiente virtual.

VALIDAÇÃO

O OA contendo o *applet* foi submetido aos alunos como atividade complementar da disciplina CDI. Os *applets* foram apresentados a 30 alunos de uma disciplina de CDI em período regular. A situação-problema proposta fez parte das atividades dirigidas aos alunos pelo docente da disciplina. Ocorreram 31 registros de respostas e, da análise desses registros, foi possível observar que na totalidade das respostas dos alunos, a possibilidade de estimar a área do círculo, por meio de aproximações com polígonos regulares, foi afirmativa, não ocorrendo nenhum registro cuja hipótese de aproximação das áreas fosse rejeitada. Os nomes foram substituídos por códigos para preservar identidades.

A possibilidade de preenchimento da área do círculo surgiu nos registros utilizando apenas um único polígono com quantidade de lados limitada conforme descrito nos registros: "[PH8] - *Sim, é possível. Para compor toda a área da circunferência na medida em que mexemos com o mouse nos polígonos, sejam eles, triangulares ou quadrados, todos podem ficar como um círculo, preenchendo toda a circunferência, a qual poderia ser dividida em partes assim como uma pizza*". Nessa fala é possível concluir que houve uma interação entre sujeito e objeto, e que após modificar a forma do polígono compreendeu que é possível assemelhar a forma desse polígono de *n* lados com um círculo e que no processo de variação da forma desse polígono é possível comparar e contar com triângulos. Em outros registros devido à utilização do *applet* foi possível generalizar a aproximação entre as áreas do círculo e do polígono após a alteração do número de lados para valores cada vez maiores: "[PH20] - *Sim. Você teria que aumentar ao máximo o número de lados do polígono de modo que a figura se aproximasse da área do círculo e que não ultrapasse seu tamanho [...]*", porém não dão detalhes do modo que fariam para que a área do polígono não fosse maior que a área do círculo de raio unitário.

Alguns registros descreveram o processo de composição e decomposição de áreas por várias figuras no interior do círculo: "[PH13] - *Sim, é possível estimar a área do círculo. Para isso é preciso dividi-lo em partes iguais. O meu procedimento foi usando um polígono hexágono dentro da circunferência e depois chegando ao centro do polígono partindo em partes iguais, obtive seis partes que deu a forma de um* *polígono triangular. Conclui que através de um polígono podemos obter a área de um círculo, basta encontrar o meio e dividir em partes iguais e cada repartição será o raio, assim podemos calcular sua área*”. Nesse registro o aluno não consegue generalizar que se ocorre para um P_6, então sob certas condições vale também para um P_n; “[PH30] - *Sim, porque todos os ângulos internos têm a mesma medida. Usando vários triângulos com as mesmas medidas e ângulos*”. Vale destacar que apesar de não estar explícito o modo como procede para dividir o polígono em partes iguais, ele o fez.

Houveram casos em que, a partir desse processo de composição, se concluiu que bastaria ter um único polígono para realizar a tarefa. Destaca-se, nos registros, um relato do aluno PH14, no qual limita a área do círculo com um valor máximo por meio de um polígono inscrito na circunferência e um polígono com vértice no exterior do círculo, e assim a área estimada do círculo não seria menor que o polígono inscrito e maior que o outro polígono com vértices externos ao círculo.

Conforme conhecimentos descritos na seção 3.1, após análise de registros, os alunos apresentaram 6 (seis) relações por grupo de alunos, essas relações são construções dos alunos: $R1a = (C1 \wedge C2)$ (PH[2, 5, 6, 18, 20, 27, 29]); $R1b = (C1 \wedge C5)$ (PH[1, 17, 19, 21]); $R1b \wedge R1d$ (PH[13, 2, 22]); $R1d = (C1 \wedge C4)$ (PH[3, 8, 9, 13, 2, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 30]); $R1d \wedge R1a$ (PH9); $R2 = (C1 \wedge (C2 \vee C3) \rightarrow C6)$ (PH[10, 11, 16]); $R3 = \big((C1 \wedge (C2 \vee C3) \wedge C4) \rightarrow C8\big) \leftrightarrow \big((C6) \wedge (C7)\big)$ (PH[4, 7, 12]); $R4 = \big((R3) \rightarrow C11\big) \leftrightarrow \big((C9) \wedge (C10)\big)$ (PH[14, 15]). As relações $R0 = (\sim C1)$ e $R1c = (C1 \wedge C3)$, previstas dentre as possíveis, não foram construídas por nenhum aluno. PH2, que realizou dois registros de respostas, apresentou inicialmente a relação $R1a$, em seguida $R1d$ e $R1b$ conjuntamente. A associação de tecnologias como o Geogebra e o Google Drive para fins educacionais demonstrou ser eficaz para registro e controle de respostas, permitindo ao docente observar a resposta ou até mesmo respostas distintas de pessoas diferentes ou da mesma pessoa sobre a mesma atividade. Um fato interessante foi o registro realizado pelo aluno PH2. No primeiro registro ele descreve um processo de composição de área por polígonos distintos e internos à circunferência, cujo objetivo era o de apenas preencher, comparar as áreas e calcular a área total pela soma das áreas de cada polígono interno à circunferência. No segundo registro foi descrito o processo utilizando apenas um polígono e aumentando a quantidade de lados com 16 vértices na circunferência. Ou seja, houve uma mudança na estratégia para resolução da situação-problema. No entanto, pelos registros não foi possível observar uma generalização para a solução da situação problema, limitou-se ao aspecto visual da figura sem explorar processos infinito e com infinitésimos pela alteração do número de lados e alteração inversa da medida dos lados. Destaca-se na pesquisa uma ideia que surgiu em vários registros, cuja hipótese de um polígono de 16 lados seria a aproximação suficiente, fato esse devido à existência de um polígono com medida de lado não alterada, e quando ocorreu a variação do lado, sua área foi comportada pela circunferência, e nesse caso pôde-se dizer que não exercitaram as ações inversas de aumentar o número de lados e diminuir o comprimento do lado objetivando uma melhor aproximação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao termino da pesquisa concluímos que, mediante experiências docentes, foi possível determinar conhecimentos da educação básica e procedimentos didáticos que auxiliam no desenvolvimento de noções e posterior possibilidade de aprendizagem do conceito de limite. Os registros de respostas dos docentes possibilitaram estabelecer uma situação-problema em um OA para abordar uma noção intuitiva de limite de funções. A partir das análises dos registros realizados pelos alunos, concluímos que esse OA tem potencial para auxiliar tanto alunos em seu processo de aprendizagem, quanto docentes em sua didática. Ao considerar os registros, foi possível estabelecer 6 (seis) grupos de desenvolvimento. O objeto de aprendizagem formulado permite formar noções de limite de funções tanto na educação básica quanto do ensino superior, se valendo da expectativa de desenvolvimento da noção de limite por aproximação de áreas. Pode-se destacar, também, a utilização da tecnologia *Google Drive* para obtenção de dados sobre registros de respostas, o que permitiu observar, mesmo diante da diversidade de respostas, a deficiência na identificação de variações inversas entre comprimento e quantidade de lados em área fixa, o que especificamente dificulta o processo de conceituação do cálculo de área em termos de função; como consequência impede que noções de limite se apresentem e o conceito não seja formado. Os formulários mostraram-se úteis tanto na pesquisa com docentes quanto nas atividades com alunos. Permitiram coletar dados sobre as resoluções, identificando acertos e erros conceituais. Mediante o uso adequado desse banco de respostas pode-se dar mais ênfase aos processos construtivos do conhecimento, ao longo das aulas que se seguem, auxiliando o planejamento das mesmas e permitindo outra forma de avaliação voltada ao processo construtivo do conhecimento.

REFERÊNCIAS

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 1999

BECKER, F. **Educação e construção do conhecimento.** 2. ed. Porto Alegre: Penso, 2012. 200 p.

BECKER, F.; MARQUES, T. B. I. (Org.). **Ser professor é ser pesquisador**. 3. ed. Porto Alegre: Mediação, 2012. 136 p.

BIZELLI, Maria Helena Sebastiana Sahão; FISCARELLI, Silvio Henrique; BARROZO, Sidineia. Tecnologia digital aplicada no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. In: Congresso de inovação, tecnologia e sustentabilidade, 1., 2010, Brusque. **Anais... .** Brusque: Unifebe, 2010. p. 1 - 10. Disponível em: <http://sites.unifebe.edu.br/~congressoits2010/artigos/artigos/013_-_TECNOLOGIA_DIGITAL_APLICADA_NO_ENSINO_E_APRENDIZAGEM_DO_CALCULO_DIFERENCIAL_E_INTEGRAL.pdf>. Acesso em: 18 dez. 2014.

DOLLE, Jean-marie. **Princípios para uma pedagogia científica.** Porto Alegre: Penso, 2011. 199 p. Tradução: Sandra Loguércio.

FAGUNDES, L.C.; SATO, L. S.i; MAÇADA, D. L. **Aprendizes do futuro:** as inovações começaram. Brasília: Mec/seed/proinfo, 1999. 95 p. (Coleção Informática para a mudança na Educação). Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me003153.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2015.

FERNANDES, F. G. et. al. Sistema para Cálculo Diferencial e Integral – SCDI. In: **Anais dos Workshops do CBIE 2012**. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/wcbie/article/view/1663/1426>. Acesso em: 01 de junho de 2016.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: Funções, Limite, Derivação e Integração**. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2007. 464 p.

GUIDORIZZI, H. Luiz. **Um Curso de Cálculo: Volume I**. São Paulo: LTC, 1985.

KESSLER, M. C. Introduzindo objetos de aprendizagem no processo de ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral. **Renote: Novas Tecnologias na Educação,** Porto Alegre, v. 6, n. 1, p.1-10, mar. 2008. Semestral. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/14687/8595>. Acesso em: 12 set. 2014.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e língua materna:** análise de uma impregnação mútua. 3. ed. São Paulo: Cortez, 1993. 169 p.

NOTARE, M. R. BEHAR, Patricia Alejandra. Aprendizagem e Comunicação Matemática em Ambientes Virtuais: Uma Experiência com o Cálculo Diferencial. In: **Anais do SBIE 2009**. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/sbie/article/view/1119/1022>. Acesso em: 01 de junho de 2016.

PIAGET, Jean et al. **A Tomada de Consciência.** São Paulo: Edições Melhoramentos, 1977. 211 p. Tradução: Edson Braga de Souza.

PIAGET, J. **Abstração reflexionante**: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

REZENDE, W. M. O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica. In: MACHADO, Nilson José; CUNHA, Marisa O. (Org.). **Linguagem, Conheciemento, Ação: ensaios de epistemologia e didática**. São Paulo: Escrituras, 2003. Cap. 19. p. 313-336. (Coleção Ensaios Transversais).

ROCHA, E. M. et. al. Uso do Geogebra nas aulas de Matemática: reflexão centrada na prática. In: **Anais do SBIE 2008**. p. 776-784. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/sbie/article/view/766/752>. Acesso em 01 de junho de 2016.

SANTOS, F. M. BARCELOS, G. T. BATISTA, Silvia Cristina F. Formação de Professores de Matemática: Avaliação de Recursos Digitais. In: **Anais do WIE 2014**. p. 189 – 199. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/wie/article/view/3100/2608>. Acesso em 01 de junho de 2016.

STEWART, J. **Cálculo: Volume I.** 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.